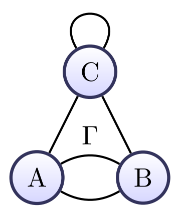
CLUB APOLLO 13, 16. Wettbewerb
Aufgabe 3

Immer positiv bleiben!

Die dritte Aufgabe wird vom Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik der Leibniz Universität Hannover gestellt.

Weitere Informationen zum Studiengang der Mathematik findet ihr unter
`http://www.math.uni-hannover.de`.

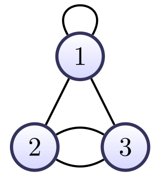
Graphen sind ein einfaches, aber mächtiges mathematisches Werkzeug. Wir stellen uns unter einem Graphen etwas anderes vor, als ihr aus der Schule kennt. Ein Graph besteht aus endlich vielen Knoten und endlich vielen Kanten, wobei jede Kante zwei der Knoten miteinander verbindet. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass sich an beiden Enden einer Kante derselbe Knoten befindet (man spricht dann von einer *Schleife*), oder dass es mehrere Kanten zwischen zwei Knoten gibt (in diesem Falle spricht man von *Mehrfachkanten*).
Ein großer Vorteil von Graphen besteht darin, dass man diese leicht mittels einer Zeichnung visualisieren, also *graphisch* darstellen, kann. Zum Beispiel stellt die folgende Figur



einen Graphen Γ (lies: Gamma) mit 3 Knoten (A, B und C) und 5 Kanten dar, eine davon eine Schleife (an C) und mit zwei Kanten (also eine Doppelkante) zwischen A und B.
Graphen sind in vielen Situationen unentbehrlich geworden, da sie sich wunderbar zur Modellierung eignen. Jeder von uns ist mit Sicherheit Graphen schon begegnet, vielleicht sogar heute morgen bei der Fahrt in der S-Bahn: Netzwerke, etwa Verkehrsnetze (für Züge, Straßenbahnen oder Flugzeuge) werden häufig durch Graphen abgebildet (vgl. Abbildung 1). Die Knoten des Graphen stellen die Haltestellen dar, die verschieden farbigen Kanten stellen eine direkte Linienverbindung zwischen zwei Haltestellen dar.

Zum Aufwärmen [Bis zu 2 Bonuspunkte]
Sammelt vier verschiedene Beispiele für Graphen aus dem Alltag (Fotonachweis!).
Was wird durch die Knoten und Kanten jeweils dargestellt?

Die Aufgabenstellung. Für diese Aufgabe wollen wir Graphen *belegen* und anschließend *bewerten*. Bei einer *Belegung* eines Graphen wird jedem Knoten des Graphen eine (reelle) Zahl zugeordnet. Zeichnerisch tragen wir einfach die Zahl in den jeweiligen Knoten ein. Zum Beispiel ist



eine Belegung des obigen Graphen Γ. Jeder solchen Belegung wollen wir einen Wert zuordnen: den *Q-Wert* der Belegung. Der Q-Wert ergibt sich als Differenz $S_1 - S_2$ zweier Summen. Bei der ersten Summe S_1 werden die Quadrate der Werte aller Knoten aufsummiert. Bei der zweiten Summe trägt

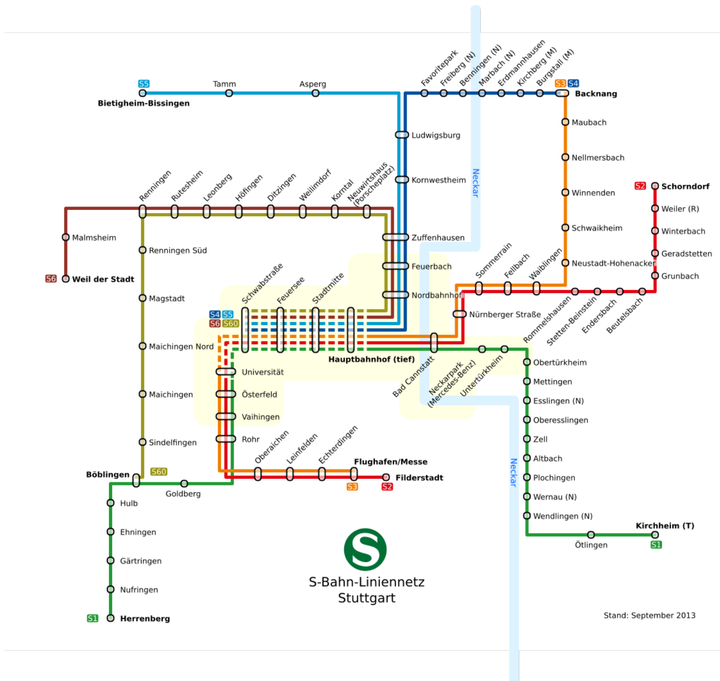
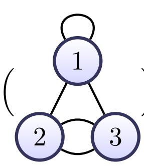


Abbildung 1. S-Bahn-Streckennetz rund um Stuttgart (Quelle: Wikipedia)

jede Kante einen Summanden bei, der Summand besteht dabei aus dem Produkt der Werte an den beiden Enden der Kante.

$$Q\text{-Wert} = \sum_{\text{Knoten } v} (\text{Wert am Knoten } v)^2 - \sum_{\text{Kanten } e} (\text{Wert am 1. Ende von } e) \cdot (\text{Wert am 2. Ende von } e).$$

Beispielsweise ist der Q-Wert der obigen Belegung des Graphen Γ gleich -4.

$Q\Big($  $\Big)$

$$= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2}_{\text{Knotenbeitrag}} \underbrace{-1 \cdot 1}_{\text{Schleife}} - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \underbrace{-2 \cdot 3 - 2 \cdot 3}_{\text{Doppelkante}} = 1 + 4 + 9 - 1 - 2 - 3 - 6 - 6 = -4.$$

Dabei fällt auf, dass in diesem Falle der Q-Wert *negativ* ist.

Jeder Graph besitzt eine „langweilige“ Belegung: Man füllt *jeden* Knoten mit dem Wert Null, und wir nennen diese Belegung sinngemäß die *Nullbelegung*. Diese Belegung hat natürlich den Q-Wert Null.

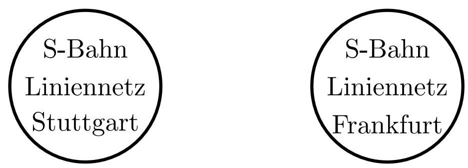
Nun können wir das Problem formulieren, das gelöst werden soll. Wir interessieren uns nur für diejenigen Graphen, die *für jede Belegung* (bis auf die Nullbelegung) einen *positiven* Q-Wert erweisen, und nennen einen solchen Graphen *positiv*. Unser Graph Γ gehört nicht dazu, wie uns die obige Belegung gezeigt hat. Aber der Graph mit zwei Knoten und einer einzigen Kante zwischen beiden ist positiv. Nennen wir die Werte der beiden Knoten x und y (mit $x, y \in \mathbb{R}$), so folgt dank der zweiten binomischen Formel:

$$Q\Big(\textcircled{x} - \textcircled{y}\Big) = x^2 + y^2 - xy = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 = (x - \frac{y}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}y}{2})^2. \qquad (\star)$$

Die rechte Seite kann als Summe von zwei Quadraten niemals negativ sein, und sie kann nur dann Null ergeben, wenn beide Summanden Null sind. Dies ist nur für $x - \frac{y}{2} = 0$ und $\frac{\sqrt{3}y}{2} = 0$ möglich, so dass $y = 0$ und demzufolge $x = 0$ sein müssen. Den Q-Wert Null erhält man also ausschließlich bei der Nullbelegung, alle anderen Q-Werte sind positiv.

Das Ziel unserer Bemühungen soll eine möglichst *vollständige Liste* sein, die sämtliche Kandidaten für positive Graphen enthält. Ein hoffnungsloses Unterfangen, wenn man die unendliche Vielfalt aller möglichen Graphen berücksichtigt? Mitnichten! Dazu braucht man nur eine clevere Strategie, die ihr in den folgenden Schritten kennenlernen und nachvollziehen sollt.

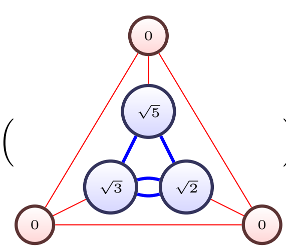
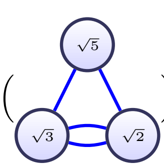
Auf den Zusammenhang kommt es an. Verkehrsnetze besitzen in der Regel eine wichtige Eigenschaft: sie sind *zusammenhängend*. Was bedeutet das? Werfen wir dafür einen Blick auf das Stuttgarter S-Bahn-Liniennetz (vgl. Abbildung 1). Dort kann man von jeder Haltestelle aus jede andere Haltestelle erreichen, indem man nur S-Bahnen benutzt. So gelangt man zum Beispiel vom Nordbahnhof zur Nürnberger Straße, indem man etwa zuerst vom Nordbahnhof zum Hauptbahnhof fährt, dort umsteigt und weiter nach Bad Cannstatt fährt und als letzten Schritt die Nürnberger Straße erreicht. Diese Abfolge von Haltestellen (Nordbahnhof – Hauptbahnhof – Bad Cannstatt – Nürnberger Straße), die die Knoten unseres Graphen darstellen, nennt man allgemein einen *Kantenzug*, denn wir bewegen uns von Knoten zu Knoten, d. h. von Haltestelle zu Haltestelle, entlang von Kanten unseres Graphens, die in diesem Fall den verschiedenen S-Bahn-Linien entsprechen.
Würden wir dagegen das Stuttgarter und das Frankfurter S-Bahn-Liniennetz als einen einzigen Graphen betrachten, so wäre dieser Graph *unzusammenhängend*: Es gibt keine Möglichkeit, vom Stuttgarter Hauptbahnhof aus den Frankfurter Hauptbahnhof zu erreichen, indem man nur mit der S-Bahn fährt. Die Liniennetze beider Städte verhalten sich aus graphentheoretischer Sicht, als wäre jedes für sich auf einer eigenen Insel: Innerhalb jeder Insel sind alle Haltestellen miteinander verbunden, es gibt aber keinerlei Verbindung zwischen je zwei Haltestellen aus verschiedenen Inseln. Anstatt von Inseln spricht man bei Graphen lieber von *Zusammenhangskomponenten*.



Wir fassen zusammen: Man nennt einen Graphen *zusammenhängend*, wenn es zwischen je zwei Knoten einen Kantenzug gibt, der die beiden verbindet.

Frage Nr. 1 [3 Punkte]
Warum können wir uns darauf beschränken, zusammenhängende Graphen zu betrachten? Begründet dafür, wie der Q-Wert eines Graphen Γ mit dem Q-Wert der einzelnen Zusammenhangskomponenten von Γ genau zusammenhängt.

Verbotene Teile. Die Idee aus dem vorherigen Paragraphen kann weiter verfeinert werden und wird uns entscheidend voranbringen. Einzelne Zusammenhangskomponenten können nämlich als „Teile“ eines Graphen angesehen werden. Solche Teile können aber etwas allgemeiner aufgefasst werden: Man zeichnet eine Teilmenge der Knoten eines Graphen aus und betrachtet nur diejenigen Kanten, die zwischen je zwei Knoten aus dieser Teilmenge verlaufen. Der Graph, der dadurch entsteht, nennt man einen *Teilgraphen* des ursprünglichen Graphen. So wird zum Beispiel in Reiseführern zu größeren Städten oft nur derjenige Teil des lokalen Verkehrsnetzes abgebildet, der im Innenstadtbereich verläuft.
Solche Teilgraphen tauchen bei Belegungen auf ganz natürliche Weise auf, denn: was passiert mit den Knoten, die eine Null enthalten? Diese liefern überhaupt keinen Beitrag zum Q-Wert der Belegung bei! Schauen wir uns ein Beispiel an:

$Q\Big($  $\Big) = Q\Big($  $\Big) = 10 - \sqrt{15} - \sqrt{10} - 2\sqrt{6}.$

Frage Nr. 2 [3 Punkte]
Begründet, warum der Q-Wert einer Belegung eines Graphen Γ mit dem Q-Wert der Belegung desjenigen Teilgraphen Λ (lies: Lambda) von Γ übereinstimmt, der nur die Knoten mit Eintrag ungleich Null berücksichtigt. Erklärt damit, warum positive Graphen keine Teilgraphen besitzen können, die nicht positiv sind.

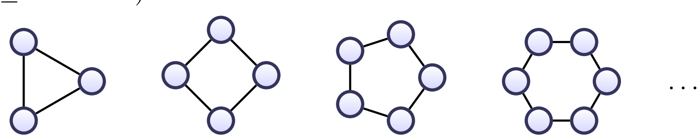
Die letzte Überlegung ist der zentrale Grundstein, auf dem unsere gesamte Strategie basiert: Wir versuchen herauszufinden, welche Teilgraphen für einen positiven Graphen *verboten* sind! Der Schlüssel zum Erfolg besteht also darin, nicht direkt nach positiven Graphen zu suchen, sondern diejenigen Graphen auszuschließen, die nicht positiv sein können.
Wie das geschieht, haben wir oben an einem Beispiel bereits gesehen. Um nachzuweisen, dass ein bestimmter Graph nicht positiv sein kann genügt es, eine Belegung zu finden (verschieden von der Nullbelegung), deren Q-Wert negativ oder Null ist. Dabei wird sich die Suche nach einer erfolgreichen Belegung mit zunehmendem Fortschreiten immer schwieriger gestalten…
Wir wünschen Euch viel Spaß bei der Suche nach der Nadel im Heuhaufen! Vergesst dabei bitte nicht, dass wir wegen der Antwort auf Frage Nr. 1 davon ausgehen können, dass die betrachteten Graphen jeweils zusammenhängend sind.

Keine Schleifen und Mehrfachkanten erlaubt: Schlichtheit. Der erste Eliminationsschritt lässt sich ganz leicht ausdrücken: Positive Graphen können nur einfache Verbindungen aufweisen; sowohl Schleifen als auch Mehrfachkanten sind bei positiven Graphen verboten. Man sagt auch, positive Graphen müssen *einfach* bzw. *schlicht* sein.

Frage Nr. 3 [3 Punkte]
Begründet, warum ein positiver Graph (a) keine Schleifen (b) keine Mehrfachkanten enthalten darf.

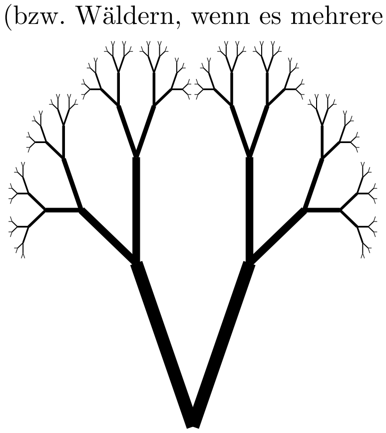
Damit wäre bereits der zum Stuttgarter S-Bahn-Liniennetz gehörige Graph mit seinen großzügigen, bis zu siebenfachen Verbindungen in unserem Sinne als nicht positiv entlarvt!

Keine Kreise erlaubt: Bäume. Schleifen und Mehrfachkanten sind Spezialfälle von sogenannten Rundwegen: Kantenzüge, die einen Knoten über Zwischenschritte mit sich selbst verbinden. So können wir zum Beispiel im Stuttgarter Netz von Ludwigsburg nach Kornwestheim mit der Linie 5 fahren, um anschließend von Kornwestheim nach Ludwigsburg mit der Linie 4 zurück zu fahren. Solche Rundwege können natürlich über weit mehr Stationen führen: Ein interessanterer Rundweg mit Start und Ziel Ludwigsburg führt zum Beispiel über den Stuttgarter Hauptbahnhof, Waiblingen, Backnang und Marbach.
Graphentheoretisch werden diese längeren Rundwege durch folgende Familie von sogenannten *Kreisen* (mit jeweils $n \geq 3$ Knoten) erfasst:

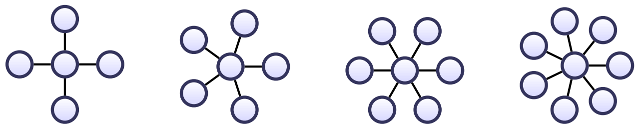


Frage Nr. 4 [3 Punkte]
Begründet, warum ein positiver Graph keine Kreise enthalten darf.

Zusammenhängende, einfache, kreisfreie Graphen (so weit sind wir schon) nennt man Bäume. Warum dies so ist, dürfte aus dem nachfolgenden Bild leicht ersichtlich sein. Positive Graphen sind also nur unter den Bäumen (bzw. Wäldern, wenn es mehrere Bäume sind) zu finden!



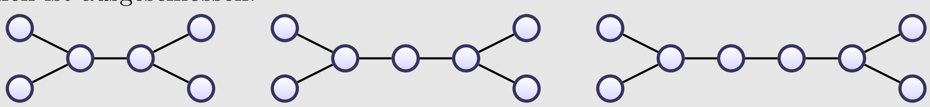
Wenige Nachbarn erlaubt: Keine Sterne. Betrachten wir nochmals das Stuttgarter S-Bahn-Liniennetz, ganz konkret die Haltestelle Waiblingen. Welche sind die *benachbarten* Haltestellen? Davon gibt es drei: Fellbach, Rommelshausen und Neustadt-Hohenacker.
Allgemein spricht man in einem Graphen von den *Nachbarn* eines Knotens v und meint damit diejenigen Knoten im Graphen, die mit v durch eine Kante verbunden sind. In einem positiven Graphen dürfen Knoten nicht all zu viele Nachbarn besitzen: Sterne mit vier oder mehr Armen – darunter versteht man die nachfolgende Familie von Graphen – sind nämlich als Teilgraphen eines positiven Graphen nicht erlaubt!


...

Frage Nr. 5 [3 Punkte]
Begründet, warum in einem positiven Graphen kein Knoten vier oder mehr Nachbarn besitzen darf.

Keine „Hundeknochen“ erlaubt. Unsere Bäume dürfen somit höchstens „Dreifachverbindungen“ (also ganz einfache Verästelungen) besitzen, und davon wiederum auch nicht zu viele:

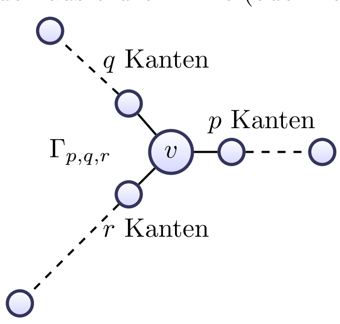
Frage Nr. 6 [3 Punkte]
Begründet, warum es in einem (zusammenhängenden) positiven Graphen keine zwei Knoten mit drei Nachbarn geben darf. Mit anderen Worten (wo geht der Zusammenhang ein?): Ein positiver Graph darf keinen Teilgraphen in der Form eines Hundeknochens enthalten, d. h. die folgende Familie von Graphen ist ausgeschlossen:


...

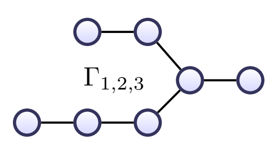
Positive zusammenhängende Graphen sind also nur unter den Bäumen ohne bzw. mit einer einzigen Dreifachbindung zu finden.

Frage Nr. 7 [3 Punkte]
Wie sieht ein zusammenhängender, einfacher, kreisfreier Graph, dessen Knoten jeweils höchstens zwei Nachbarn besitzen, aus? Findet einen griffigen Namen für diesen Typ von Graphen!

Dies ist die erste (unendliche) Familie zusammenhängender Graphen, die Kandidaten für Positivität sind. Nun müssen wir die zweite übrig gebliebene Klasse von Graphen näher untersuchen: Es handelt sich um Bäume, die genau einen Knoten v mit drei Nachbarn besitzen. Solche Graphen sehen so aus, als würden aus v drei Arme (oder Tentakeln?) entspringen:



Beispiel:



Wir notieren jeweils, wie lang diese Arme (also die Anzahl von Kanten) sind; diese Armlängen mögen mit p bzw. q bzw. r bezeichnet werden (in aufsteigender Reihenfolge, also $p \leq q \leq r$). Den zugehörigen Graphen bezeichnen wir dementsprechend mit $\Gamma_{p,q,r}$.

Frage Nr. 8 [3 Punkte]
Begründet, warum für positives $\Gamma_{p,q,r}$ (i) $p = 1$ und (ii) $q < 3$ gelten muss.

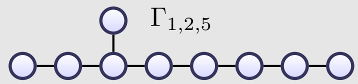
Hinweis: Es müssen also die Graphen $\Gamma_{2,2,2}$ sowie $\Gamma_{1,3,3}$ ausgeschlossen werden (wieso genügt das?).

Letzte Fälle. Unsere Suche nähert sich dem Ende zu: Es bleiben nur noch die Fälle mit $q = 1$ und $q = 2$ übrig. Die unendliche Familie $\Gamma_{1,1,r}$ mit beliebiger Armlänge $r \geq 1$ vergrößert unsere Kandidatenliste für positive (zusammenhängende) Graphen. Aber für $q = 2$ kann der dritte Arm nicht beliebig lang werden:

Frage Nr. 9 [3 Punkte]
Begründet, warum für positives $\Gamma_{1,2,r}$ die Länge des dritten Armes durch $r < 5$ beschränkt sein muss.

Mit anderen Worten: Der Graph $\Gamma_{1,2,5}$ (warum genau *nur* dieser Graph?)

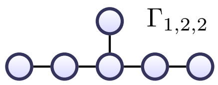
$\Gamma_{1,2,5}$



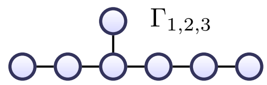
muss als Teilgraph eines positiven Graphen ausgeschlossen werden.

Zu unserer Liste gesellen sich also nur noch drei weitere Graphen:

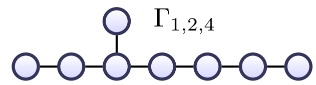
$\Gamma_{1,2,2}$



$\Gamma_{1,2,3}$



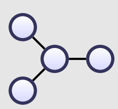
$\Gamma_{1,2,4}$

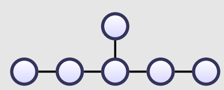


Damit ist unsere Kandidatenliste für positive Graphen vollständig! Sie enthält zwei unendliche Familien und drei Ausnahmefälle (wie wir gerade gesehen haben, sind nur die ersten drei Mitglieder einer weiteren unendlichen Serie positiv).

Abschluss. Unsere Suche mag damit beendet sein, die mathematische Arbeit aber noch lange nicht: Es bleibt noch zu zeigen, dass alle Graphen in unserer Kandidatenliste tatsächlich positiv sind. Wie das genau funktioniert, lernt ihr im Mathematik-Studium. Um zumindest einen gewissen Vorgeschmack auf diese unerledigte Fragestellung zu vermitteln, schließen wir mit folgender Frage ab:

Frage Nr. 10 [3 Punkte]
Zeigt, z.B. ähnlich wie bei Gleichung ($\star$) auf Seite 2, dass die folgenden Graphen (der Dreistern und $\Gamma_{1,2,2}$) positiv sind:





Hinweis: Es reicht natürlich zu zeigen, dass $\Gamma_{1,2,2}$ positiv ist, denn der Dreistern ist ein Teilgraph davon. Aber man sollte immer mit bescheidenen Zielen anfangen...

Ein letzter Hinweis: In den Fragen 3, 4, 5, 6, 8 und 9 geht es darum zu zeigen, dass gewisse Graphen nicht positiv sind. Dazu genügt es, jeweils eine Belegung zu finden (verschieden von der Nullbelegung), deren Q-Wert negativ oder Null ist.

Allgemeine Hinweise

Einsendeschluss: Sonntag, 18. Dezember 2016, 19:59 Uhr.

Gebt eure Lösungen über das Portal von uniKIK ab:
`http://www.unikik-portal.de/portal`

Zulässige Dateiformate sind: PDF für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern) sowie unter Windows gängige Videoformate, die sich ohne Installation von zusätzlicher Software abspielen lassen. (Denkt bitte an die Korrektoren/-innen und deren Rechner.)

Die Dateien sollten nicht größer als 7,5 MB sein (Die Dateien können gezippt sein)! Bitte gebt auch euren Teamnamen, die Namen der Gruppenmitglieder sowie deren Schulen an. Bitte benennt eure hochgeladenen Dateien nach dem Gruppennamen.

ACHTUNG bei Zip-Dateien! Um sicher zu gehen, dass eure Dateien wirklich fehlerfrei und für die Korrektoren zu öffnen sind, solltet ihr eure Zip-Dateien etc. noch einmal von eurem Account runterladen und öffnen. Dateien, die sich nicht öffnen lassen, können nicht bewertet werden!

Ihr könnt und solltet eure Lösung auch dann abgeben, wenn ihr nicht alle Fragen beantworten konntet, insbesondere die letzte Teilaufgabe nicht gelöst habt! Vielleicht gelingt euch das ja bei den kommenden Aufgaben.

Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter:
`http://www.unikik.de/apollo13`

Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.