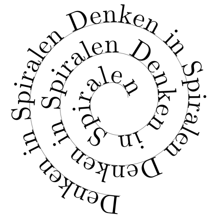
# CLUB APOLLO 13, 14. Wettbewerb
## Aufgabe 2




## Denken in Spiralen

Die zweite Aufgabe wird vom Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik der Leibniz Universität Hannover gestellt.

Weitere Informationen zum Studiengang Mathematik findet ihr unter
`http://www.math.uni-hannover.de`.

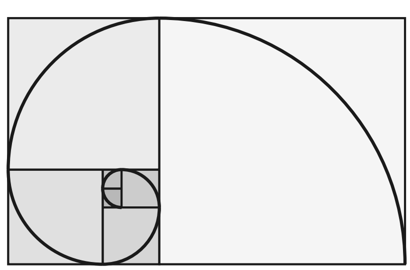
---

Ihr habt einen Teil des Sommers in einem Benediktinerkloster verbracht, um in der dortigen verstaubten, uralten Bibliothek nach versteckten Schätzen zu suchen. Besonders haben es euch die fragmentarischen Aufzeichnungen des ehemaligen Klosterbruders *David von Harpid* angetan. Er scheint die Natur mit einem mathematisch geschärften Blick betrachtet zu haben. Könnt ihr euch einen Reim auf die Textfragmente machen?

### Erstes Fragment

Vor kurzem fand ich in unserer Klosterbibliothek das Büchlein eines Gelehrten, Gutmutigson genannt. Eine wahrlich anregende Lektüre! Dort las ich folgendes Gedankenexperiment: Eine bestimmte Schneckenart benötigt ein Jahr zur Geschlechtsreife. Ab diesem Zeitpunkt bringt ein Schneckenpaar nach jedem Jahr ein weiteres Paar zur Welt. Fängt man mit einem Paar neugeborener Schnecken an und zählt jedes Jahr aufs Neue, wie viele Schneckenpaare es dann gibt, so entsteht eine wunderbare Abfolge von Zahlen. Denkt man sich diese Zahlen als Seitenlängen von Quadraten und ordnet die Quadrate im Uhrzeigersinn an, so entsteht eine spiralige lückenlose Überdeckung der Ebene. Trägt man schließlich in jedes Quadrat einen Viertelkreis ein, so entsteht eine Kurve, die meinen geliebten Schneckenhäusern nicht unähnlich sieht!

**Aufgabe 1. (5 P.)** Wir bezeichnen mit $S(n)$ die Anzahl von Schnecken, die man zu Beginn des $n$-ten Jahres zählt (beginnend mit $S(1) = S(2) = 1$). Wie lauten die ersten 12 dieser Zahlen? Könnt ihr ein allgemeines Prinzip angeben, nach dem diese Zahlen gebildet werden, und dieses kurz begründen? Wie hängt diese Folge mit dem folgenden Bild zusammen?

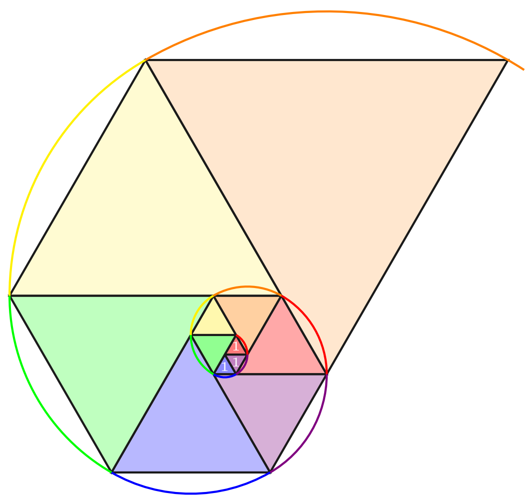


## Zweites Fragment

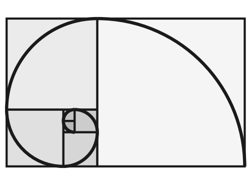
Ich wurde zunehmend unglücklich über die Folge des Gutmutigson und ihre geometrische Darstellung, fand trotz intensiver Suche aber nichts Besseres. Bis vor kurzem: Auf der mühsamen, langen Reise von Pisa nach Padua kam mir die Erleuchtung. Denn wer hat schon unsterbliche Schnecken gesehen? Ich änderte diesen Schönheitsfehler im Gedankenexperiment des Gutmutigson und ließ die Schnecken nach genau drei Jahren sterben. Und so erhielt ich, Schnecken Jahr für Jahr zählend, eine wahrlich noch wundersamere Abfolge von Zahlen, die mich diesmal auf eine Spirale gleichseitiger Dreiecke führte. Die sieht nun meinen Schneckenhäusern viel ähnlicher! Ich kann es kaum abwarten, in mein Kloster zurückzukehren, um diese Abfolge weiter zu untersuchen...

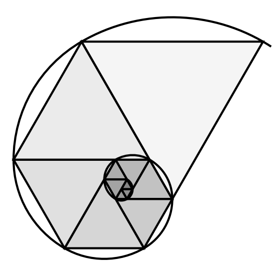
**Aufgabe 2. (5 P.)** Es sei nun $K(n)$ die Anzahl von Schnecken, die man zu Beginn des $n$-ten Jahres nach der modifizierten Regel des Mönchs zählt. Gebt die ersten 12 dieser Zahlen an! Könnt ihr auch in diesem Falle ein allgemeines Prinzip beschreiben, nach dem diese Zahlen gebildet werden, und dieses kurz begründen? Wo lässt sich diese Folge innerhalb des nachstehenden Bildes finden und warum?

*Tipp*: Die Schnecken haben in den letzten beiden Lebensjahren Nachwuchs und wir haben $K(1) = K(2) = 1$ sowie $K(3) = 2$. Anhand des Bildes sind zwei der möglichen Bildungsgesetze geometrisch erkennbar.



Seid ihr mit der Behauptung des Mönchs einverstanden, dass die zweite Spirale seinen geliebten Schneckenhäusern ähnlicher sieht als die erste? Findet Argumente zu seinen Gunsten!

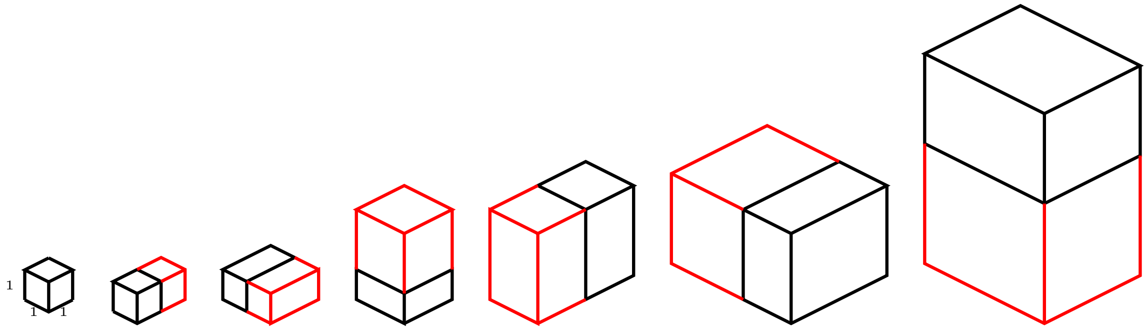




## Drittes Fragment

Um wie viel schöner meine Schneckenfolge gegenüber der des Gutmutigsons doch ist! Denn meine Folge erfüllt nicht nur die Ebene, sondern sogar den Raum, wie ich gestern bei folgender Konstruktion in der Klosterschreinerei feststellte: Ich fing mit einem Würfel der Kantenlänge Eins an. Dann fügte ich spiralförmig, und zwar in der Reihenfolge Nord, Ost, Oben, Süd, West, Unten weitere Quader hinzu und setzte diesen Anbau in Gedanken für alle Zeiten fort, so dass sich jeder neue Quader an das bisherige Gebilde nahtlos anfügte, wobei ich als fehlende dritte Ausdehnungsgröße das jeweils zweitlängste Maß unter Länge, Breite und Höhe des vorigen Quaders nahm.

**Aufgabe 3. (5 P.)** Es sei $Q_n$ der Quader, der nach des Mönchs Vorschrift im $n$-ten Schritt entsteht. Mit $A$, $B$, $C$ bezeichnen wir seine Maße ($Q_n$ hat also die Größe $A \times B \times C$), wobei wir diese der Größe nach geordnet aufschreiben, d. h. $A \leq B \leq C$. Wie lautet die Folge der Maße für die Quader $Q_n$ und warum? Was ist der Zusammenhang zur Folge $K(n)$ aus Aufgabe 2?

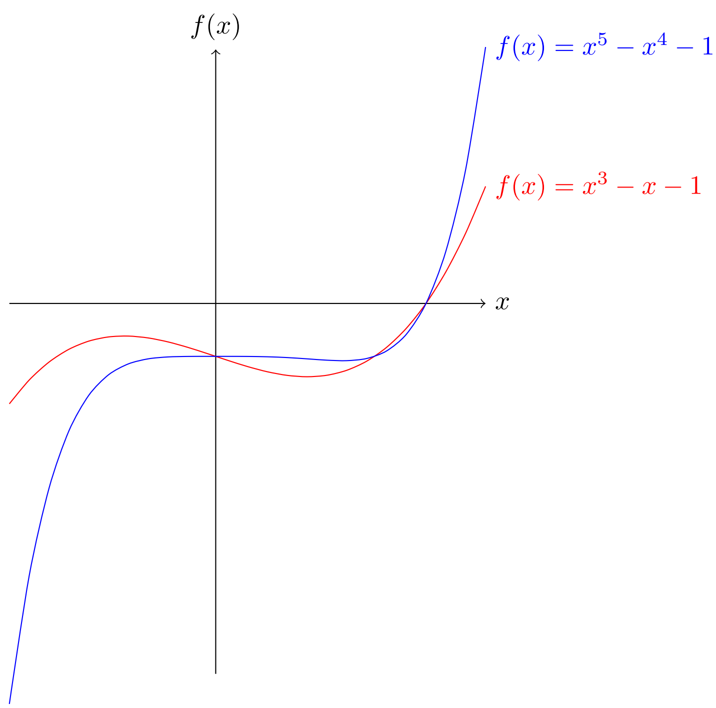



**Viertes Fragment**

Folgende Frage raubte mir in den letzten Tagen den Schlaf: Trotz der Sterblichkeit meiner gedachten Schnecken wächſt deren Zahl doch inſ Unermeßliche. Die Population ſteigt von Jahr zu Jahr zwar nicht um einen feſten Faktor, doch nähert ſich die jährliche Wachſtumſrate einer myſteriöſen Zahl, je weiter wir in die Ewigkeit voranſchreiten, dem goldenen Einfall deſ Gutmutigſon nicht unähnlich. Doch wie lautet dieſe Zahl? Trotz fieberhafter Suche kam ich nicht dahinter, biſ ich ſie letzte Nacht alſ gemeinſame Wurzel zweier Gleichungen erkannte, eine davon kubiſch. Welche Geheimniſſe mögen ſich wohl hinter dieſer Zahl noch verſtecken? Ich nenne ſie c, caeleſtia, die himmliſche. . .

**Aufgabe 4. (5 P.)** Die Quotienten $\frac{K(n+1)}{K(n)}$ zweier aufeinander folgender Glieder der obigen Folge nähern sich einer Zahl $c$. Warum ist diese eine Nullstelle des kubischen Polynoms $x^3 - x - 1$ und des Polynoms $x^5 - x^4 - 1$? Warum ist das zweite Polynom ein Vielfaches des ersten? Warum ist $c$ die einzige reelle Nullstelle der beiden Polynome?

*Tipp*: Die Polynome stehen in direktem Zusammenhang mit den in Aufgabe 2 gefundenen Bildungsgesetzen.

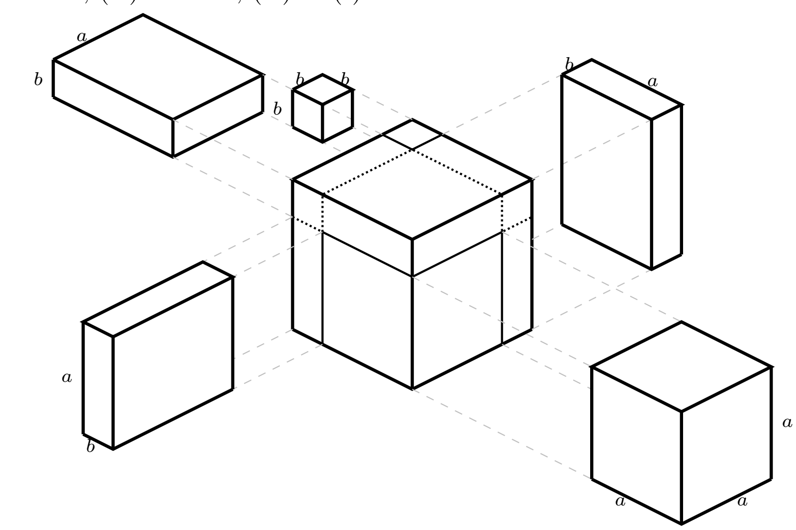


**Fünftes Fragment**

> Meine Gedanken kreisten in letzter Zeit um die Frage, wie man die himmliche Zahl c konkret berechnen kann. Beim Zuschneiden von Klötzen in der Schreinerei erschien mir die Antwort auf diese Frage auf wundersame Weise. Ein Würfel zerfällt in zwei kleinere Würfel, die sich an einer Ecke berühren, und drei gleich große Quader. Das Gesamtvolumen dieser drei Quader ist um einen Kubikdezimeter kleiner als das Volumen des Gesamtwürfels und gleich dem Volumen einer quadratischen Säule mit einem Quadratdezimeter Grundfläche und gleicher Höhe wie der des Würfels. Nun findet heraus, welche Seitenlänge der Würfel hat!

**Aufgabe 5. (5 P.)** Warum ist die Seitenlänge des großen Würfels (ohne Dimension) gleich der in Aufgabe 4 beschriebenen himmlischen Zahl $c$ des Mönchs? Wie lang sind die Seiten $a$ und $b$ der beiden kleineren Würfel? Bestimmt $a$, $b$ und $c(= a + b)$ auf drei Stellen nach dem Komma genau!

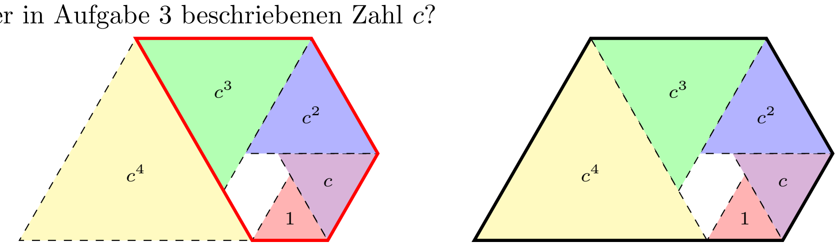
*Tipp*: (I) $a^3 + b^3 = 1$, (II) $3ab = 1$, (II) in (I) einsetzen und nach $a$ bzw. $b$ auflösen!



**Sechstes Fragment**

> Meine Zeit geht zu Ende, und sogar im Sterbebett kreisen meine Gedanken um Zahlen und Figuren, begleitet vom Singsang meiner Brüder... Habe wieder gleichseitige Dreiecke in Spiralen entstehen lassen... Doch diesmal ließ ich die Dreiecke um denselben Faktor gleichmäßig wachsen. Dabei fiel mir auf, dass einzig meine Zahl c ein Seitenverhältnis liefert, das lauter zueinander ähnliche Fünfecke entstehen lässt! Ähnlich bis in alle Ewigkeit...

**Aufgabe 6. (5 P.)** Damit hören die übrig gebliebenen spärlichen Aufzeichnungen des David von Harpid auf. Wir versuchen, diese etwas mysteriöse letzte Erklärung zu interpretieren. Bei einem (irregulären) Fünfeck sei das Verhältnis zweier benachbarter Seiten bis auf ein Paar von Seiten konstant, und alle Peripheriewinkel bis auf einen seien gleich 120°. Durch Anfügen eines gleichseitigen Dreiecks ensteht ein neues Fünfeck, das zu dem alten ähnlich ist (vgl. das nachfolgende Bild, Fünfecke mit roter und schwarzer Umrandung hervorgehoben). Warum entspricht das Seitenverhältnis der in Aufgabe 3 beschriebenen Zahl $c$?




Und zu guter Letzt: Sind euch nach der Auseinandersetzung mit der Folge $K(n)$ weitere Gesetzmäßigkeiten, Kuriositäten oder Interpretationen dazu ein- bzw. aufgefallen (möglichst mit Begründung)? Eure Einfälle und Beobachtungen werden mit bis zu drei Bonuspunkten belohnt!

**Allgemeine Hinweise**

**Einsendeschluss: Sonntag, 30. November 2014, 19:59 Uhr.**

Gebt eure Lösungen über das Portal von uniKIK ab:
`http://www.unikik-portal.de/portal`

Zulässige Dateiformate sind: PDF für die gesamte Lösung (Text, eventuell mit eingebetteten Bildern), sowie unter Windows gängige Videoformate, die sich ohne Installation von zusätzlicher Software abspielen lassen. (Denkt bitte an die Korrektoren/-innen und deren Rechner.)

Die Dateien sollten nicht größer als 7,5 MB sein (Die Dateien können gezippt sein)! Bitte gebt auch euren Teamnamen, die Namen der Gruppenmitglieder sowie deren Schulen an. Bitte benennt eure angehängten Dateien nach dem Gruppennamen.

**ACHTUNG bei Zip-Dateien!** Um sicher zu gehen, dass eure Dateien wirklich fehlerfrei und für die Korrektoren zu öffnen sind, solltet ihr eure Zip-Dateien etc. noch einmal von eurem Account herunterladen und öffnen. Dateien, die sich nicht öffnen lassen, können nicht bewertet werden!

Ihr könnt und solltet eure Lösung auch dann abgeben, wenn ihr nicht alle Fragen beantworten konntet, insbesondere die letzte Teilaufgabe nicht gelöst habt! Vielleicht gelingt euch das ja bei den kommenden Aufgaben.

Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter:
`http://www.unikik.de/apollo13`

Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.

Harpa Davidis (Davidsharfe) *Quelle:* Wikipedia

**Anhang: Klartext.** Falls ihr Schwierigkeiten mit dem Lesen von Frakturschrift habt…

**Erstes Fragment**

Vor kurzem fand ich in unserer Klosterbibliothek das Büchlein eines Gelehrten, Gutmutigson genannt. Eine wahrlich anregende Lektüre! Dort las ich folgendes Gedankenexperiment: Eine bestimmte Schneckenart benötigt ein Jahr zur Geschlechtsreife. Ab diesem Zeitpunkt bringt ein Schneckenpaar nach jedem Jahr ein weiteres Paar zur Welt. Fängt man mit einem Paar neugeborener Schnecken an und zählt jedes Jahr aufs Neue, wie viele Schneckenpaare es dann gibt, so entsteht eine wunderbare Abfolge von Zahlen. Denkt man sich diese Zahlen als Seitenlängen von Quadraten und ordnet die Quadrate im Uhrzeigersinn an, so entsteht eine spiralige lückenlose Überdeckung der Ebene. Trägt man schließlich in jedes Quadrat einen Viertelkreis ein, so entsteht eine Kurve, die meinen geliebten Schneckenhäusern nicht unähnlich sieht!

**Zweites Fragment**

Ich wurde zunehmend unglücklich über die Folge des Gutmutigson und ihre geometrische Darstellung, fand trotz intensiver Suche aber nichts Besseres. Bis vor kurzem: Auf der mühsamen, langen Reise von Pisa nach Padua kam mir die Erleuchtung. Denn wer hat schon unsterbliche Schnecken gesehen? Ich änderte diesen Schönheitsfehler im Gedankenexperiment des Gutmutigson und ließ die Schnecken nach genau drei Jahren sterben. Und so erhielt ich, Schnecken Jahr für Jahr zählend, eine wahrlich noch wundersamere Abfolge von Zahlen, die mich diesmal auf eine Spirale gleichseitiger Dreiecke führte. Die sieht nun meinen Schneckenhäusern viel ähnlicher! Ich kann es kaum abwarten, in mein Kloster zurückzukehren, um diese Abfolge weiter zu untersuchen…

**Drittes Fragment**

Um wie viel schöner meine Schneckenfolge gegenüber der des Gutmutigsons doch ist! Denn meine Folge erfüllt nicht nur die Ebene, sondern sogar den Raum, wie ich gestern bei folgender Konstruktion in der Klosterschreinerei feststellte: Ich fing mit einem Würfel der Kantenlänge Eins an. Dann fügte ich spiralförmig, und zwar in der Reihenfolge Nord, Ost, Oben, Süd, West, Unten weitere Quader hinzu und setzte diesen Anbau in Gedanken für alle Zeiten fort, so dass sich jeder neue Quader an das bisherige Gebilde nahtlos anfügte, wobei ich als fehlende dritte Ausdehnungsgröße das jeweils zweitlängste Maß unter Länge, Breite und Höhe des vorigen Quaders nahm.

**Viertes Fragment**

Folgende Frage raubte mir in den letzten Tagen den Schlaf: Trotz der Sterblichkeit meiner gedachten Schnecken wächst deren Zahl doch ins Unermeßliche. Die Population steigt von Jahr zu Jahr zwar nicht um einen festen Faktor, doch nähert sich die jährliche Wachstumsrate einer mysteriösen Zahl, je weiter wir in die Ewigkeit voranschreiten, dem goldenen Einfall des Gutmutigson nicht unähnlich. Doch wie lautet diese Zahl? Trotz fieberhafter Suche kam ich nicht dahinter, bis ich sie letzte Nacht als gemeinsame Wurzel zweier Gleichungen erkannte, eine davon kubisch. Welche Geheimnisse mögen sich wohl hinter dieser Zahl noch verstecken? Ich nenne sie c, caelestia, die himmlische…

**Fünftes Fragment**

Meine Gedanken kreisten in letzter Zeit um die Frage, wie man die himmliche Zahl c konkret berechnen kann. Beim Zuschneiden von Klötzen in der Schreinerei erschien mir die Antwort auf diese Frage auf wundersame Weise. Ein Würfel zerfällt in zwei kleinere Würfel, die sich an einer Ecke berühren, und drei gleich große Quader. Das Gesamtvolumen dieser drei Quader ist um einen Kubikdezimeter kleiner als das Volumen des Gesamtwürfels und gleich dem Volumen einer quadratischen Säule mit einem Quadratdezimeter Grundfläche und gleicher Höhe wie der des Würfels. Nun findet heraus, welche Seitenlänge der Würfel hat!

**Sechstes Fragment**

Meine Zeit geht zu Ende, und sogar im Sterbebett kreisen meine Gedanken um Zahlen und Figuren, begleitet vom Singsang meiner Brüder… Habe wieder gleichseitige Dreiecke in Spiralen entstehen lassen… Doch diesmal ließ ich die Dreiecke um denselben Faktor gleichmäßig wachsen. Dabei fiel mir auf, dass einzig meine Zahl c ein Seitenverhältnis liefert, das lauter zueinander ähnliche Fünfecke entstehen lässt! Ähnlich bis in alle Ewigkeit…