B!G B4NG challenge, 18. Wettbewerb
Aufgabe 4

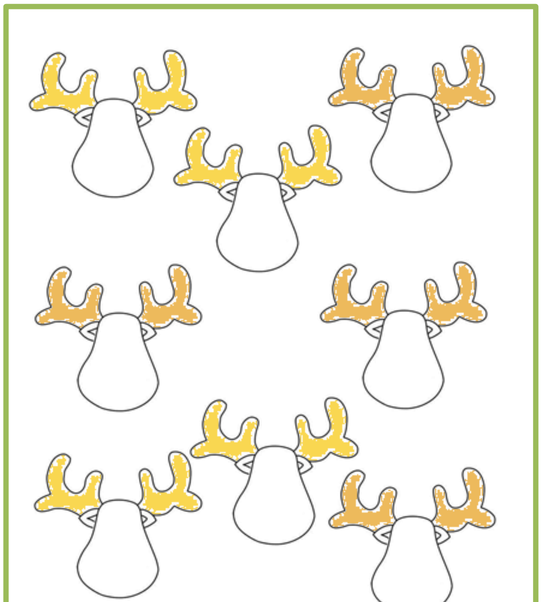
Epistemische Weihnachtslogik

Diese Aufgabe wird vom Fachgebiet Software Engineering der Leibniz Universität Hannover gestellt.

Weitere Informationen zum Studium der Informatik findet ihr unter:

https://www.et-inf.uni-hannover.de/

Wir starten mit einem kleinen Gedankenexperiment. Stellt euch vor, der Weihnachtsmann hat *n* Rentiere. Von den *n* Rentieren haben *k* Rentiere goldene Geweihe. Die anderen *n*-*k* Rentiere haben beige-braune Geweihe. Jedes Rentier kann die Farbe der Geweihe der anderen Rentiere sehen, weiß aber nicht, welche Farbe sein eigenes Geweih hat. Nach einiger Zeit kommt der Weihnachtsmann zur Herde und sagt: „Mindestens einer von euch hat ein goldenes Geweih“. Der Weihnachtsmann stellt nun die Frage: „Wer von euch weiß, dass er ein goldenes Geweih hat?“ Ist $k \neq 1$, so kann die Frage beim ersten Mal keiner beantworten. Also fragt der Weihnachtsmann erneut die gleiche Frage. So geht es weiter, bis er die Frage zum *k*-ten Mal stellt. Auf einmal antworten alle Rentiere mit einem goldenen Geweih: „Ich!“ Ist das Zufall? Nein. Im Rahmen dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, warum dieses Ergebnis zuverlässig und reproduzierbar ist.


Quelle: northpolechristmas.com

Aufgabe 1 (10 Punkte):

Mit Hilfe von Logik kann der Ausgang des obigen Gedankenexperiments erklärt werden. In diesem Aufgabenteil betrachten wir das Problem zunächst für fünf Rentiere, von denen drei ein goldenes Geweih haben. Im nächsten Aufgabenteil könnt ihr das Rätsel dann allgemeiner für *n* Rentiere erklären, von denen *k* Rentiere ein goldenes Geweih haben.

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es, unter fünf Rentieren drei mit einem goldenen Geweih zu platzieren? Berechnet die Anzahl an Möglichkeiten und schreibt zudem alle Möglichkeiten auf.

Nehmt nun an, dass die Rentiere 1, 2 und 3 goldene und die Rentiere 4 und 5 beige-braune Geweihe haben.

2. Warum ist diese Annahme zulässig?

3. Beschreibt aus Sicht der Rentiere 1 und 4 den Verlauf, d. h., was sie nach dem ersten, nach dem zweiten und nach dem dritten Fragen wissen oder annehmen.
4. Warum wissen die drei Rentiere nach dem dritten Fragen, dass sie ein goldenes Geweih haben?
5. Woher wissen sie, dass es kein viertes Rentier mit einem goldenen Geweih geben kann?

Wir betrachten nun eine andere Rentierherde, in der wieder drei Rentiere goldene und zwei Rentiere beige-braune Geweihe haben. Diese Rentiere sehen sich zum ersten Mal, wenn sie vor dem Schlitten angeschirrt sind. Die Rentiere kennen die Farbe ihrer Geweihe nicht.

6. Was passiert nun, wenn der Weihnachtsmann die Frage wieder und wieder stellt? Wie können die Rentiere herausfinden, welche Farbe ihr Geweih hat?

Aufgabe 2 (10 Punkte):

Im Ausgangsrätsel hat der Weihnachtsmann nicht fünf Rentiere, von denen drei goldene Geweihe haben, sondern *n* Rentiere mit *k* goldenen Geweihen. Wie könnt ihr eure Lösungen aus der ersten Teilaufgabe für variable Anzahlen verallgemeinern?

Aufgabe 3 (10 Punkte):

Diese Erklärungen für das Rätsel kann man mit Hilfe der so genannten epistemischen Logik formalisieren. Dazu wird ein Operator *K* eingeführt, der Wissen repräsentiert. Die Aussage $K_a(\Phi)$ wird so interpretiert, dass eine Person *a* weiß, dass Φ gilt. Um mit dem Operator zu arbeiten, werden üblicherweise vier Axiome vorausgesetzt:

(i) $K_a(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (K_a(\Phi) \rightarrow K_a(\Psi))$

(ii) $K_a(\Phi) \rightarrow \Phi$

(iii) $K_a(\Phi) \rightarrow K_a(K_a(\Phi))$

(iv) $\neg K_a(\Phi) \rightarrow K_a(\neg K_a(\Phi))$

1. Erklärt die Bedeutung der vier Axiome in eigenen Worten. Gebt auch zu zwei Axiomen Beispiele an, die auf die Rentieraufgabe bezogen sind.
2. Erklärt kurz in eigenen Worten die folgenden Ausdrücke und leitet sie aus den zuvor genannten Axiomen unter Verwendung von Logikoperatoren her. Ihr dürft auch nutzen, dass $(\Phi \wedge (\Phi \rightarrow \Psi)) \rightarrow \Psi$ gilt.
   a. $K_a(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow K_a(\Phi)$
   b. $K_a(\Phi) \rightarrow K_a(\Phi \vee \Psi)$
   c. $(K_a(\Phi) \wedge K_a(\Phi \rightarrow \Psi)) \rightarrow K_a(\Psi)$
   d. $(K_a(\Phi \wedge \Psi) \wedge K_a\big((\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \neg K_b(\mathrm{T})\big) \rightarrow K_a(\neg K_b(\mathrm{T}))$

Mit diesen Axiomen könnt ihr nun formal beweisen, warum die fünf Rentiere aus Aufgabenteil 1 nach dem dritten Fragen wissen, dass sie goldene Geweihe haben.

3. Leitet drei gültige Aussagen über das Wissen der Rentiere her, z. B. „Rentier 1 weiß, dass Rentier 2 ein goldenes Geweih hat“ und formuliert sie unter Verwendung von oben genannter Notation.
4. Beweist nun unter Verwendung des Wissensoperators, dass die drei Rentiere nach dem dritten Mal Fragen wissen, dass sie goldene Geweihe haben.

Wir wünschen euch viel Spaß beim Lösen der vierten und letzten Aufgabe des Wettbewerbs und ein schönes Weihnachtsfest!

Allgemeine Hinweise

Einsendeschluss: Sonntag, 27. Januar 2019, 19:59 Uhr.

Gebt eure Lösungen über unser Portal ab: https://portal.studienberatung.uni-hannover.de/

Zulässige Dateiformate sind PDF für die zusammengeschriebene Lösung (mit eingebetteten Bildern) sowie unter Windows gängige Videoformate, die sich ohne Installation von zusätzlicher Software abspielen lassen, z. B. mp4.

Die Dateien sollten nicht größer als 7,5 MB sein (die Dateien können gezippt sein)! Bitte gebt auch euren Teamnamen, die Namen der Gruppenmitglieder sowie deren Schulen an. Bitte benennt eure hochgeladenen Dateien nach dem Gruppennamen.

ACHTUNG bei Zip-Dateien! Um sicherzugehen, dass eure Dateien wirklich fehlerfrei und für die Korrektoren/-innen zu öffnen sind, solltet ihr eure Zip-Dateien etc. noch mal von eurem Account herunterladen und öffnen. Dateien, die sich nicht öffnen lassen, können nicht bewertet werden!

Gebt eure Lösungen auch dann ab, wenn ihr nicht alle Fragen beantworten konntet! Vielleicht gelingt euch das ja bei den kommenden Aufgaben.

Die Teilnahmebedingungen und weitere Informationen findet ihr unter https://www.uni-hannover.de/bigbangchallenge.

Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.